

Priprave na MMO 2025 – 8. domača naloga

1. Naj bosta n in k naravni števili. Dokaži, da velja

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{d}.$$

2. Na tabli so v nekem vrstnem redu zapisana števila 1, 1, 2, 2, ..., 2026, 2026. Ali je mogoče, da za vsako naravno število $1 \leq k \leq 2026$ velja, da je med dvema pojavitvama števila k natanko $k - 1$ števil?
3. V šoli je 2025 dijakov in 2025 dijakinj. Vsak izmed njih obiskuje kvečjemu 100 krožkov. Recimo, da vsak par dijakov nasprotnega spola obiskuje vsaj en skupni krožek. Dokažite, da obstaja krožek, ki ga obiskuje vsaj 11 dijakov in vsaj 11 dijakinj.
4. Naj bo $n > 3$ naravno število. V krogu sedi n otrok, med katere je razdeljenih n kovancev (nekateri otroci so lahko brez kovanca). V vsakem koraku lahko otrok z vsaj dvema kovancema da en kovanec vsakemu od svojih direktnih sosedov. Določi vse začetne razporeditve kovancev, iz katerih je mogoče v končnem številu korakov doseči, da ima vsak otrok natanko en kovanec.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **25. 5. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

..... (*kraj in datum*)

Podpis: